

1.- Combinatoria

La Combinatoria es la parte de las Matemáticas que estudia las diversas formas de realizar agrupaciones con los elementos de un conjunto, formándolas y calculando su número.

Existen distintas formas de realizar estas agrupaciones, según se repitan los elementos o no, según se puedan tomar todos los elementos de que disponemos o no y si influye o no el orden de colocación de los elementos.

Para poder calcular el número de agrupaciones se define:

- ✓ **Factorial de un número.** Siendo n un número natural, se define factorial de n (n!) como:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

- ✓ **Números combinatorios.** Siendo m y n números naturales con $m \geq n$ se define el número combinatorio m sobre n (C_m^n) como:

$$C_m^n = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$$

m = n° de elementos que disponemos. n = n° de elementos que cogemos.		ORDEN	
		SI	NO
REPETIR	NO	m ≠ n VARIACIONES $V_m^n = \underbrace{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots}_{n \text{ factores}}$ m = n PERMUTACIONES $P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1$	COMBINACIONES $C_m^n = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$
	SI	m ≠ n VARIACIONES CON REPETICIÓN $VR_m^n = m^n$ m = n PERMUTACIONES CON REPETICIÓN (Sabido como se repiten) $P_m^{r_1, r_2, r_3, \dots} = \frac{m!}{r_1! \cdot r_2! \cdot r_3! \cdot \dots}$	COMBINACIONES CON REPETICIÓN $CR_m^n = C_{m+n-1}^n$

1. ¿Cuántos números de 2 cifras se pueden formar con las cifras impares?
2. ¿Cuántos números de 4 cifras se pueden formar con las cifras impares?
3. ¿Cuántos números de 2 cifras diferentes se pueden formar con las cifras impares?
4. ¿Cuántos números de 4 cifras diferentes se pueden formar con las cifras impares?
5. ¿Cuántos números de 3 cifras diferentes se pueden formar con las cifras 1,2,3?
6. ¿Cuántos números de 3 cifras se pueden formar con las cifras 1,2,3?
7. ¿Cuántos números de 3 cifras se pueden formar con las cifras 1,2 de forma que el 2 se repita dos veces?
8. Calcula de cuántas formas podemos ordenar 10 libros en una librería si....
 - a) Los libros son diferentes
 - b) Hay 3 libros iguales de mate, 5 iguales de lengua y 2 iguales de historia.
9. En una clase de 26 alumnas
 - a) Elegimos tres para la comisión de festejo
 - b) Elegimos tres para la comisión de festejos (Una es la presidenta, otra la secretaria y la tercera la vocal)
10. Tenemos 3 bicicletas iguales para sortear entre las 26 alumnas de una clase. ¿De cuántas formas podemos hacerlo si cada alumna sólo se puede llevar una bicicleta?
11. Tenemos 3 bicicletas (una de carretera, una de montaña y otra de trialsin) para sortear entre las 26 alumnas de una clase. ¿De cuántas formas podemos hacerlo si cada alumna sólo se puede llevar una bicicleta?
12. Contesta a las dos preguntas anteriores, suponiendo que se permite que una alumna pueda ganar más de una bicicleta.
13. Ocho ciclistas van por el carril bici en fila. ¿De cuántas formas pueden ir ordenados?
14. A una familia de 6 personas les ha tocado un viaje para dos personas. ¿De cuántas formas se pueden repartir el viaje?
15. En un concurso de radio participan 7 personas, de las cuales, 2 pueden conseguir los premios, que son: una enciclopedia y una radio. Sabiendo que una persona no puede conseguir los dos premios, ¿cuántas posibles distribuciones hay?
16. Para hacer una transferencia bancaria, Marta tiene que teclear una clave de acceso que consta de 8 cifras con los dígitos 0 y 1. ¿Cuántas claves distintas puede formar?
17. Para desayunar, Mario elige 4 pastas distintas de las 12 clases que tiene. ¿Cuántas posibles elecciones hay?
18. En un campeonato de motos hay 15 participantes y tres premios a repartir. ¿De cuántas formas se pueden repartir?

19. Con todas las letras de la palabra TIJERA, ¿cuántas palabras, con o sin sentido, se pueden formar sin repetir las letras?
20. Cierta equipo de baloncesto cuenta con 11 jugadores, pero solo se necesitan 5 para jugar un partido. ¿Cuántas alineaciones distintas se podrán formar?
21. Belén necesita seleccionar 4 personas, entre los 20 candidatos que tiene, para formar su equipo de trabajo. ¿De cuántas maneras puede hacer la selección?
22. Con las letras de la palabra JUNIO, ¿cuántas palabras, con o sin significado, podemos formar con 4 letras, pudiendo estas repetirse?
23. En un torneo de balonmano hay 8 equipos participantes y solo 3 trofeos, ¿de cuántas maneras distintas se pueden repartir los premios 1º, 2º y 3º?
24. Tenemos que formar un código de 6 cifras con los dígitos 0 y 1. ¿Cuántas posibilidades hay?
25. Sabiendo que los puestos de delegado y de subdelegado no pueden ser cubiertos por la misma persona, calcula cuántas posibilidades hay para cubrir ambos cargos en una clase de 22 alumnos.
26. En una carrera organizada en un centro escolar participan los 6 finalistas de 4º ESO. ¿De cuántas formas distintas pueden llegar a la meta?
27. ¿De cuántas formas se pueden repartir 4 bocadillos distintos entre 4 amigos, si cada uno debe recibir solo uno?
28. Ana, Pilar y Susana tienen que elegir una optativa entre 3 posibilidades para el próximo curso. Si entre ellas no quieren coincidir en la misma optativa, ¿de cuántas formas se podrían llegar a repartir las optativas?
29. Marcos tiene 8 sabores distintos de helado para preparar copas de 3 sabores. ¿Cuántas copas distintas puede preparar?
30. En una empresa se quieren contratar 5 agentes de seguridad. Si al proceso de selección se presentan 10 personas, ¿de cuántas formas distintas se pueden ocupar las cinco plazas?
31. Un club de tenis dispone de 15 jugadores profesionales de los cuales debe seleccionar 8 para jugar un torneo. ¿Cuántos grupos se pueden formar?
32. ¿Cuántas ordenaciones pueden hacerse con las letras de la palabra PINCEL de modo que comiencen y terminen por consonante?
33. Para formar la tripulación de un avión se eligen 3 comandantes y 4 azafatas entre un grupo de 11 personas, 5 de las cuales son comandantes y el resto, azafatas. ¿Cuántas tripulaciones distintas se pueden formar?
34. Con las cifras 1, 3, 4, 5 y 6, ¿cuántos números de cuatro cifras distintas se podrán formar de modo que acaben en cifra par?
35. Los 13 alumnos de un grupo de 2º de Bachillerato desean que les hagan una foto a todos juntos, en fila, como recuerdo de su paso por el instituto. En dicha foto no deben aparecer ni dos chicas ni dos chicos juntos. Sabiendo que hay 7 chicas, ¿de cuántas formas distintas pueden colocarse?

2.- Sucesos

2.1.- Definiciones

Al realizar un experimento puede ocurrir dos cosas:

- ✓ Que podemos predecir el resultado antes de que se realicen: **Experimentos deterministas.**
- ✓ Que no se puede predecir el resultado, ya que éste depende del azar: **Experimentos aleatorios.**

En los experimentos aleatorios, cada uno de los posibles resultados se llama **suceso elemental** y el conjunto de todos los posibles resultados se llama **espacio muestral**, que se representa por E. Cualquier subconjunto del espacio muestral se denomina suceso.

Dos tipos particulares de sucesos son:

- ✓ **Suceso seguro:** formado por todos los sucesos elementales (E)
- ✓ **Suceso imposible:** es el que no tiene ningún suceso elemental (\emptyset)

2.2.- Relación entre sucesos

Sucesos compatibles: Dos sucesos, A y B, son compatibles cuando tienen algún suceso elemental común.

Si A es sacar puntuación par al tirar un dado y B es obtener múltiplo de 3, A y B son compatibles porque el 6 es un suceso elemental común.

Sucesos incompatibles: Dos sucesos, A y B, son incompatibles cuando no tienen ningún elemento en común.

Si A es sacar puntuación par al tirar un dado y B es obtener múltiplo de 5, A y B son incompatibles.

Sucesos independientes: Dos sucesos, A y B, son independientes cuando la probabilidad de que suceda A no se ve afectada porque haya sucedido o no B.

Al lanzar dos dados los resultados son independientes.

Sucesos dependientes: Dos sucesos, A y B, son dependientes cuando la probabilidad de que suceda A se ve afectada porque haya sucedido o no B.

Extraer dos cartas de una baraja, sin reposición, son sucesos dependientes.

Suceso contrario: El suceso contrario a A es otro suceso que se realiza cuando no se realiza A. Se denota por \bar{A} .

Son sucesos contrarios sacar par e impar al lanzar un dado.

2.3.- Operaciones con sucesos

Unión: La unión de dos sucesos A y B ($A \cup B$) es el suceso formado por todos los sucesos elementales que forman A y B.

Consideramos el experimento que consiste en lanzar un dado, si A = "sacar par" y B = "sacar múltiplo de 3":

$$\begin{array}{l} A = \{2,4,6\} \\ B = \{3,6\} \end{array} \implies A \cup B = \{2,3,4,6\}$$

Intersección: La intersección de dos sucesos A y B ($A \cap B$) es el suceso formado por todos los sucesos elementales que están en A y B a la vez.

Consideramos el experimento que consiste en lanzar un dado, si A = "sacar par" y B = "sacar múltiplo de 3":

$$\begin{array}{l} A = \{2,4,6\} \\ B = \{3,6\} \end{array} \implies A \cap B = \{6\}$$

Contrario: El contrario de un suceso A (A^c) es el suceso formado por todos los sucesos elementales que no estén en A

Consideramos el experimento que consiste en lanzar un dado, si A = "sacar par":

$$A = \{2,4,6\} \implies A^c = \{1,3,5\}$$

- ¿Cuál es el espacio muestral asociado a cada uno de estos experimentos aleatorios?
 - Lanzar una moneda al aire y anotar el resultado.
 - Extraer una carta de una baraja española y anotar el resultado.
 - Preguntar en una encuesta si es Hombre (H) o Mujer (M) y si se es Trabajador (T) o Parado (P) y anotar los resultados.
- Lanzamos un dado tetraédrico con las caras numeradas del 1 al 4 y anotamos el resultado de la cara oculta. Se pide:

a. Espacio muestral.	c. Suceso "Obtener número impar"
b. Suceso "Obtener número par"	d. Suceso "Obtener múltiplo de 3"
- En el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado dos veces y anotar la suma de las caras superiores, determina:
 - El espacio muestral.
 - Un suceso imposible, un suceso seguro
 - Los sucesos A = "Obtener suma par", B = "Obtener suma mayor que 6", C = "Obtener suma múltiplo de 3"
 - Los sucesos $A \cap B$, $C \cap B$, $A \cup C$, $A^c \cap C$, $(B \cup C)^c$
- Se tiene una bolsa con nueve bolas numeradas del 1 al 9. Se extrae una bola de la bolsa, se anota el número y se devuelve a la bolsa. Se pide:
 - Espacio muestral.

3.2.- Propiedades de la probabilidad

- ✓ La probabilidad es positiva y menor que 1

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- ✓ La probabilidad del suceso seguro es 1

$$P(E) = 1$$

- ✓ Si A y B son sucesos incompatibles, entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- ✓ Si A y B son compatibles, entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- ✓ La probabilidad del suceso contrario de A es:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

- ✓ La probabilidad del suceso imposible es 0

$$P(\emptyset) = 0$$

3.3.- Probabilidad condicionada

Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral E. Se llama probabilidad del suceso B condicionado a A y se representa por $P(B/A)$ a la probabilidad del suceso B una vez ha ocurrido el A.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- ✓ Si los sucesos son independientes, entonces:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- ✓ Si los sucesos son dependientes, entonces:

$$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

Un método útil para clasificar los datos obtenidos en un recuento es mediante las **tablas de contingencia**.

Se trata de tablas en cuyas celdas figuran probabilidades, y en la cual podemos determinar unas probabilidades conociendo otras de la tabla.

Ejemplo: Se sortea un viaje a Roma entre los 120 mejores clientes de una agencia de automóviles. De ellos, 65 son mujeres, 80 están casados y 45 son mujeres casadas

	Hombres	Mujeres	
Casados	35	45	80
Solteros	20	20	40
	55	65	120

3.4.- Probabilidad total

Un **experimento compuesto** es aquel que consta de dos o más experimentos aleatorios simples.

Es decir, si tiramos un dado, o una moneda, son experimentos aleatorios simples, pero si realizamos el experimento de tirar un dado y posteriormente una moneda, estamos realizando un experimento compuesto.

En los experimentos compuestos es conveniente usar el llamado **diagrama en árbol** para hacerse una idea global de todos ellos.

Para la construcción de un **diagrama en árbol** se partirá poniendo una **rama** para cada una de las **posibilidades**, acompañada de su **probabilidad**.

En el **final** de cada **rama parcial** se constituye a su vez, un **nudo** del cual parten nuevas **ramas**, según las **posibilidades** del siguiente paso, salvo si el nudo representa un posible final del experimento (**nudo final**).

Probabilidad total: sean A_1, A_2, \dots, A_n son sucesos incompatibles 2 a 2 cuya unión es el espacio muestral, entonces la probabilidad de un suceso B viene dada por:

$$p(B) = p(A_1) \cdot p(B/A_1) + p(A_2) \cdot p(B/A_2) + \dots + p(A_n) \cdot p(B/A_n)$$

- Una bolsa contiene 100 papeletas de una rifa numeradas del 1 al 100. Si se extrae una de ellas al azar, calcula la probabilidad de que el número extraído tenga:
 - Una sola cifra.
 - Dos cifras.
 - Tres cifras.
 - Cuatro cifras.
- En una urna hay 6 bolas rojas, 4 amarillas y 5 verdes. Si se extrae una de ellas al azar, calcula la probabilidad de que la bola extraída:
 - Sea roja o verde.
 - No sea ni roja ni verde.
- Luís y Pedro juegan a un juego consistente en lanzar dos dados y calcular el producto de los números resultantes, si el producto es par gana Luís y si es impar gana Pedro. ¿Es justo el juego?
- Al marcar un número de teléfono un abonado se olvidó de las tres últimas cifras y recordando solamente que estas cifras eran diferentes las marcó al azar. Hallar la probabilidad de que se hayan marcado las cifras correctas.
- De un programa con 25 preguntas, un estudiante sabe 20. Hallar la probabilidad de que el estudiante conteste a las tres preguntas dadas por el examinador.
- Calcúlese la probabilidad de que el número premiado del sorteo de la ONCE tenga todas las cifras pares.
- Calcúlese la probabilidad de que la combinación ganadora de la Lotería Primitiva:
 - incluya los números 15 y 25
 - no incluya ningún número acabado en 5
 - incluya únicamente dos números acabados en 5

8. En una clase en la que todos practican algún deporte, el 60% de los alumnos juega al fútbol o al baloncesto y el 10% practica ambos deportes. Si además a y un 60% que no juega al fútbol, ¿cuál será la probabilidad de que escogido al azar un alumno de la clase:
 - a. Juegue sólo al fútbol
 - b. Juegue sólo al baloncesto
 - c. Practique uno solo de los deportes
 - d. No juegue ni al fútbol ni al baloncesto
9. En una ciudad, el 40% de la población tiene cabellos castaños, el 25% tiene ojos castaños y el 15% tiene cabellos y ojos castaños. Se escoge una persona al azar:
 - a. Si tiene los cabellos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que tenga también ojos castaños?
 - b. Si tiene ojos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga cabellos castaños?
 - c. ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga cabellos ni ojos castaños?
10. En un aula hay 100 alumnos, de los cuales: 40 son hombres, 30 usan gafas, y 15 son varones y usan gafas. Si seleccionamos al azar un alumno de dicho curso:
 - a. ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y no use gafas?
 - b. Si sabemos que el alumno seleccionado no usa gafas, ¿qué probabilidad hay de que sea hombre?
11. Se sortea un viaje a Roma entre los 120 mejores clientes de una agencia de automóviles. De ellos, 65 son mujeres, 80 están casados y 45 son mujeres casadas. Se pide:
 - a. ¿Cuál será la probabilidad de que le toque el viaje a un hombre soltero?
 - b. Si del afortunado se sabe que es casado, ¿cuál será la probabilidad de que sea una mujer?
12. En un centro escolar los alumnos pueden optar por cursar como lengua extranjera inglés o francés. En un determinado curso, el 90% de los alumnos estudia inglés y el resto francés. El 30% de los que estudian inglés son chicos y de los que estudian francés son chicos el 40%. El elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?
13. Se dispone de tres tarjetas, dos blancas y una roja. Se reparten al azar entre tres personas, A, B y C, entregando una a cada una. Construya un espacio muestral adecuado y calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:
 - a. A tiene una tarjeta blanca.
 - b. B tiene una tarjeta blanca.
 - c. A y B tienen cada uno una tarjeta blanca.
14. Tenemos cinco pares de guantes. Entremezclamos bien los diez guantes y elegimos dos de ellos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que formen parejas?
15. Un dominó normal consta de 28 fichas: cero-cero, cero-uno,..., seis-seis. Siete de estas fichas son dobles: cero-cero, uno-uno,... Calcúlese la probabilidad de encontrar algún doble al tomar cuatro fichas al azar del dominó.
16. En una caja tenemos 15 bolas blancas, 30 bolas negras y 45 bolas verdes. Si extraemos tres bolas simultáneamente, ¿cuál es la probabilidad de que salga una bola de cada color?
17. En una urna hay 6 bolas blancas y 3 bolas negras. Se extraen sucesivamente 3 bolas sin reemplazamiento. Calcular la probabilidad de que alguna bola sea negra.

18. En una bolsa hay 5 bolas con el número 1, 4 bolas con el número 2 y 6 bolas con el número 3. Se extraen dos bolas una a una sin reemplazamiento. Se pide:
- Probabilidad de que la segunda bola tenga número impar.
 - Probabilidad de que las dos bolas tengan números pares.
19. La probabilidad de cartear a un blanco de tres tiradores A, B y C son, respectivamente $1/6$, $1/4$ y $1/3$. Si cada uno de ellos dispara una sola vez al blanco, calcular:
- La probabilidad de acierte uno sólo.
 - La probabilidad de que al menos uno acierte.
20. Tenemos dos urnas como sigue:
- A: 4 bolas rojas y 6 blancas
- B: 7 bolas rojas y 3 blancas
- Se selecciona una urna al azar, se extrae una bola y se coloca en la otra urna. A continuación una bola de la segunda urna. Calcular la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color.
21. El 35% de los créditos de un banco son para vivienda, el 50% para industrias y el 15% para consumo diverso. Resultan fallidos el 20% de los créditos para vivienda, 15% de los créditos para industria y el 70% de los créditos para consumo. Calcular la probabilidad de que se pague un crédito elegido al azar.
22. El volumen de producción en tres plantas diferentes de un fábrica es de 500 unidades en la primera, 1000 unidades en la segunda y 2000 en la tercera. Sabiendo que el porcentaje de unidades defectuosas producidas en cada planta es del 1%, 0'8% y 2% respectivamente, calcular la probabilidad de que al seleccionar una unidad al azar sea defectuosa.
23. Tres cofres idénticos contiene: el primero 3 lingotes de oro y 2 de plata; el segundo 2 de oro y 5 de plata; y el tercero 6 de oro y 7 de plata. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer un lingote al azar de un cofre al azar sea de plata?
24. En la clase hay 10 alumnas rubias, 20 morenas, 5 alumnos rubios y 10 morenos. Un día asisten 44 alumnos. Encontrar la probabilidad de que el alumno que falta
- Sea hombre.
 - Sea mujer morena.
 - Sea hombre o mujer.
25. Un dado muestra tres caras rojas y otras tres azules. Se realiza el experimento consistente en lanzar el dado cuatro veces consecutivas y anotar, cada vez, el color de la cara superior. Se pide:
- Escribir el espacio muestral de esta experiencia aleatoria.
 - Escribir, respecto de los elementos del espacio muestral, los sucesos:
A = "La última vez se ha obtenido cara roja"
B = "Sólo hay una cara roja"
 - Calcular $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ y $P(A \cup B)$. ¿Cómo son entre sí los sucesos A y B?